



SIGMA KWADRAT

CZWARTY LUBELSKI KONKURS STATYSTYCZNO-DEMOGRAFICZNY

Statystyka w analizie portfelowej Harrego Markowitza

dr Mieczysław Kowerski

NBP

Narodowy Bank Polski

PROJEKT DOFINANSOWANY ZE ŚRODKÓW
NARODOWEGO BANKU POLSKIEGO



URZĄD STATYSTYCZNY
W LUBLINIE



WYŻSZA SZKOŁA ZARZĄDZANIA
I ADMINISTRACJI W ZAMOŚCIU



POLSKIE TOWARZYSTWO
STATYSTYCZNE

HARRY M. MARKOWITZ, USA



Laureat Nagrody im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii w 1990
Za innowacyjne prace w dziedzinie teorii ekonomii finansowej
- wspólnie z Mertonem Millerem i Williamem Sharpe'm

Podstawowe fakty z życia i działalności: Urodził w Chicago w 1927 r. Miejsce pracy naukowej: City University of New York. Wraz z dwoma innymi naukowcami - równocześnie nagrodzonymi - Markowitz jest współtwórcą modelu ustalania cen aktywów kapitałowych.

W badaniach nad analizą rynków finansowych Harry Markowitz skoncentrował się na zarządzaniu portfelem inwestycyjnym.

Najważniejsze publikacje:

1. "Portfolio selection", Journal of Finance ,Vol. 7, 1952, nr 1 s.77-99
2. Portfolio selection: efficient diversification of investments. New York: Wiley 1959, 344 s.
3. Portfolio theory, 25 years after. Essays in honour of Harry Markowitz. Amsterdam: North - Holland Publ.Comp. 1979, 256 s.
4. Portfolio selection: efficient diversification of investments.2 ed.- Cambridge, MA Oxford : Blackwell, 1998, 389 s.

Stopa zwrotu

Stopa zwrotu (rate of return, return), zwana również stopą zysku określa dochód przypadający na jednostkę zainwestowanego kapitału.

$$R_t = [(P_t - P_{t-1}) + D_t] / P_{t-1} * 100\%$$

R_t – stopa zwrotu akcji osiągnięta w t -tym okresie;

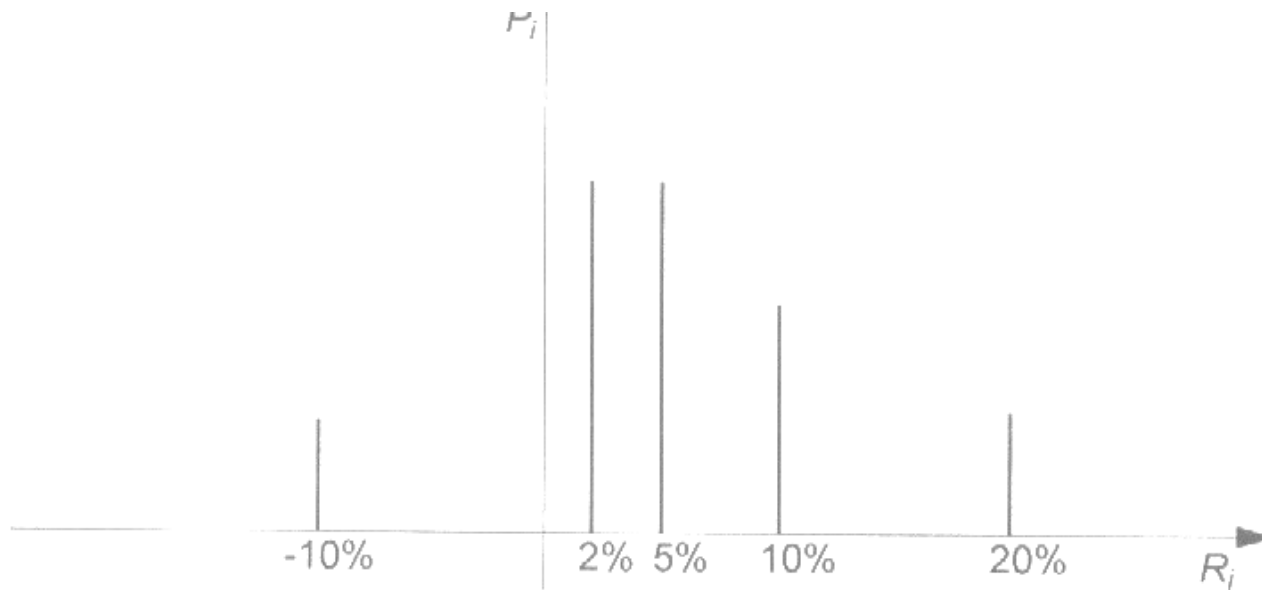
P_t – cena akcji w t -tym okresie;

D_t – dywidenda wypłacona w t -tym okresie.

Stopa zwrotu spółki nie płacącej dywidendy

$$R_t = [(P_t - P_{t-1}) / P_{t-1}] * 100\%$$

Rozkład stopy zwrotu akcji



Rys. 4.1. Rozkład stopy zwrotu akcji

Oczekiwana stopa zwrotu (expected return)

$$R = \sum_{i=1}^m p_i R_i$$

R_i – i -ta możliwa do osiągnięcia wartość stopy zwrotu;

p_i – prawdopodobieństwo osiągnięcia i -tej możliwej wartości stopy zwrotu;

m – liczba możliwych do osiągnięcia wartości stopy zwrotu.

Stopa zwrotu (historyczna)

W praktyce stopę zwrotu oblicza się na podstawie danych historycznych.

$$R = \left(\sum_{i=1}^n R_t \right) / n$$

R_t – stopa zwrotu akcji zrealizowana w t -tym okresie;

n – liczba okresów, z których pochodzą dane.

Ryzyko w inwestowaniu

- 1) **Ryzyko stopy procentowej** (*interest rate risk*),
- 2) **Ryzyko kursów walut** (*foreign exchange risk*),
- 3) **Ryzyko siły nabywczej**, inaczej zwane ryzykiem inflacji (*inflation risk, purchasing power risk*),
- 4) **Ryzyko rynku** (*market risk, bull-bear market risk*),
- 5) **Ryzyko niedotrzymania warunków** (*default risk*),
- 6) **Ryzyko zarządzania** (*management risk*),
- 7) **Ryzyko biznesu** (*business risk*),
- 8) **Ryzyko finansowe** (*financial risk*),

Ryzyko w inwestowaniu (cd.)

- 9) **Ryzyko bankructwa** (*bankruptcy risk*),
- 10) **Ryzyko płynności** (*liquidity risk, marketability risk*),
- 11) **Ryzyko zmiany ceny**, zwane również ryzykiem okresu posiadania (*holding period risk*),
- 12) **Ryzyko reinwestowania** (*reinvestment risk*),
- 13) **Ryzyko wykupu na żądanie** (*call risk, callability risk*),
- 14) **Ryzyko zamienności** (*convertibility risk*),
- 15) **Ryzyko polityczne** (*political risk*),
- 16) **Ryzyko wydarzeń** (*event risk*).

Ryzyko akcji: Wariancja stóp zwrotu

Miarą ryzyka akcji, jest wariancja stopy zwrotu akcji
(variance of returns) lub krótko wariancja akcji

$$V = \sum_{i=1}^m p_i (R_i - R)^2$$

V – wariancja stopy zwrotu,

R – oczekiwana stopa zwrotu.

Odchylenie standardowe stopy zwrotu (standard deviation of returns)

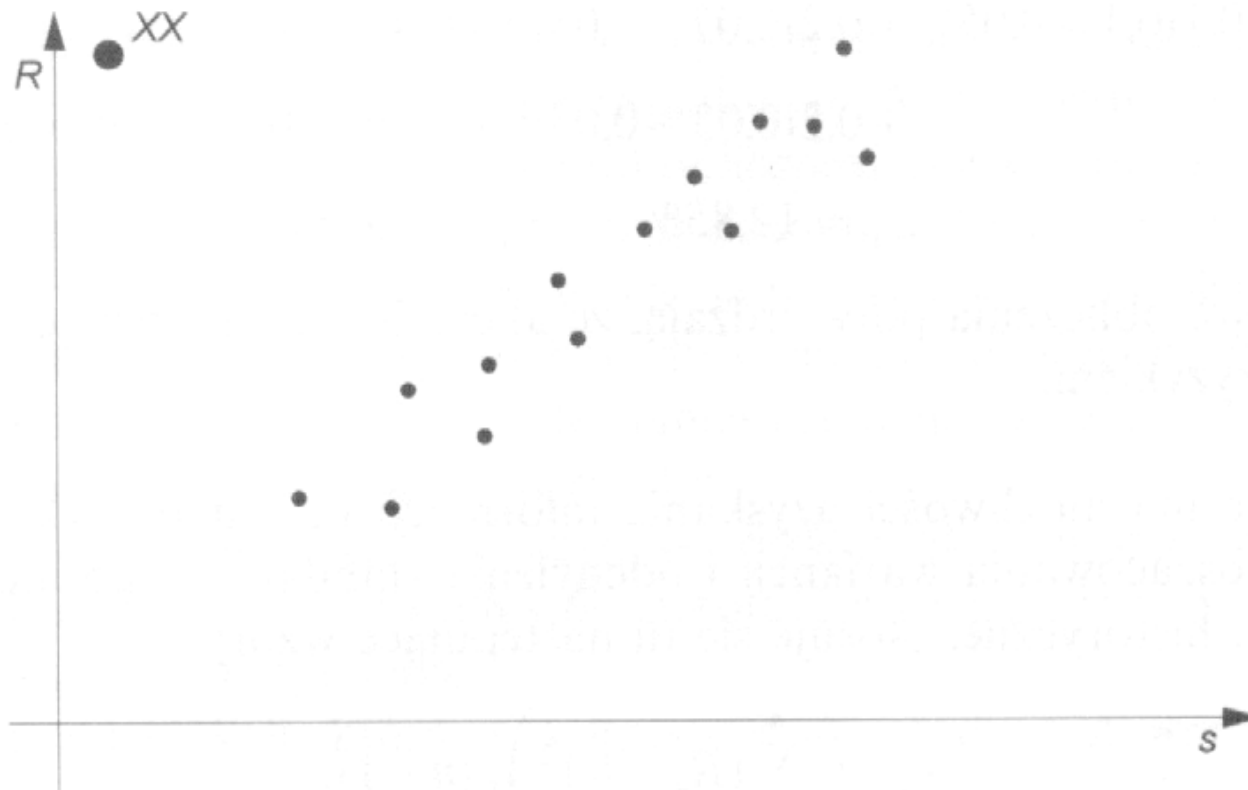
$$s = V^{0,5} = \left(\sum_{i=1}^m p_i (R_i - R)^2 \right)^{0,5}$$

Wariancja i odchylenie historyczne

$$V = \left(\sum_{t=1}^n (R_t - R)^2 \right) / (n - 1)$$

$$s = V^{0,5}$$

Ryzyko / dochód



Rys. 4.2. Wykres ryzyko-dochód

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona

Mierzy siłę i kierunek zależności pomiędzy dwiema zmiennymi (cechami). Przyjmuje wartości z przedziału $[-1 ; 1]$.

Wartość zero współczynnika korelacji oznacza brak jakichkolwiek zależności pomiędzy zmiennymi.

Im wyższa bezwzględna wartość współczynnika korelacji tym silniejsza zależność pomiędzy zmiennymi.

Wartość większa od zera oznacza zależność dodatnią, wartość mniejsza od zera zależność ujemną

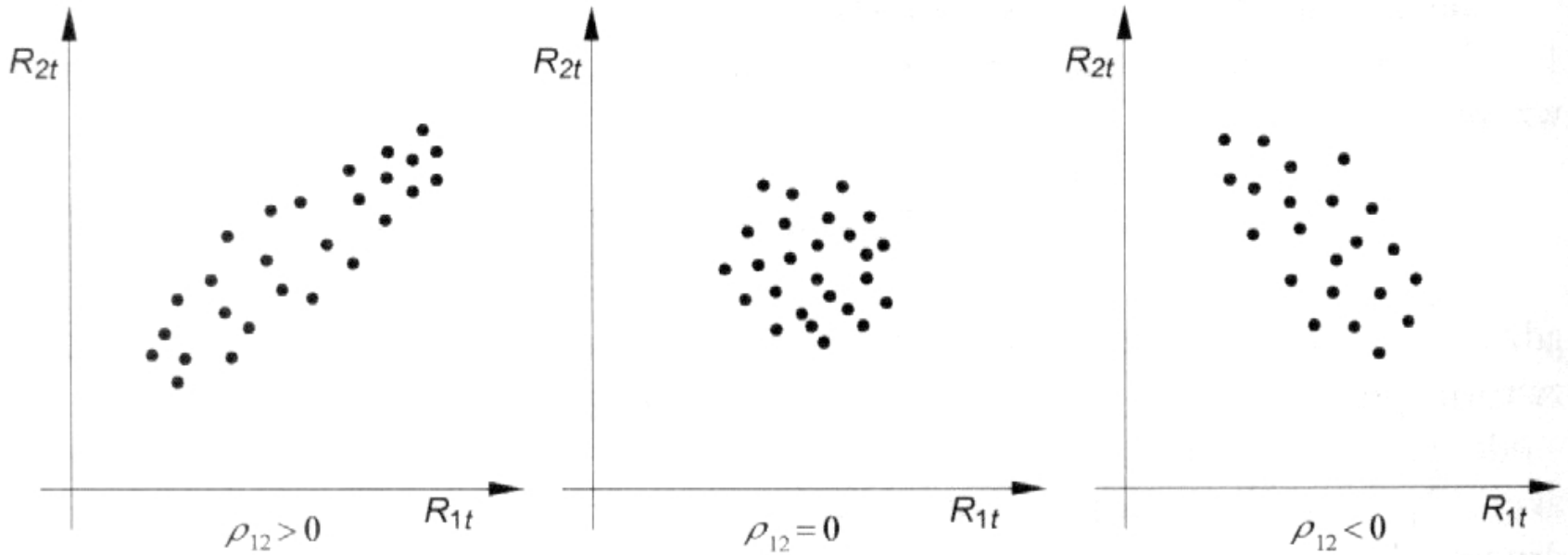
Korelacja stóp zwrotu akcji

$$r_{12} = \left[\sum_{i=1}^m p_i (R_{1i} - R_1)(R_{2i} - R_2) \right] / (s_1 s_2)$$

- r_{12} – współczynnik korelacji stóp zwrotu akcji,
- R_1 – oczekiwana stopa zwrotu pierwszej akcji,
- R_2 – oczekiwana stopa zwrotu drugiej akcji,
- s_1 – odchylenie standardowe pierwszej akcji,
- s_2 – odchylenie standardowe drugiej akcji,
- R_{1i} – możliwe stopy zwrotu pierwszej akcji,
- R_{2i} – możliwe stopy zwrotu drugiej akcji.

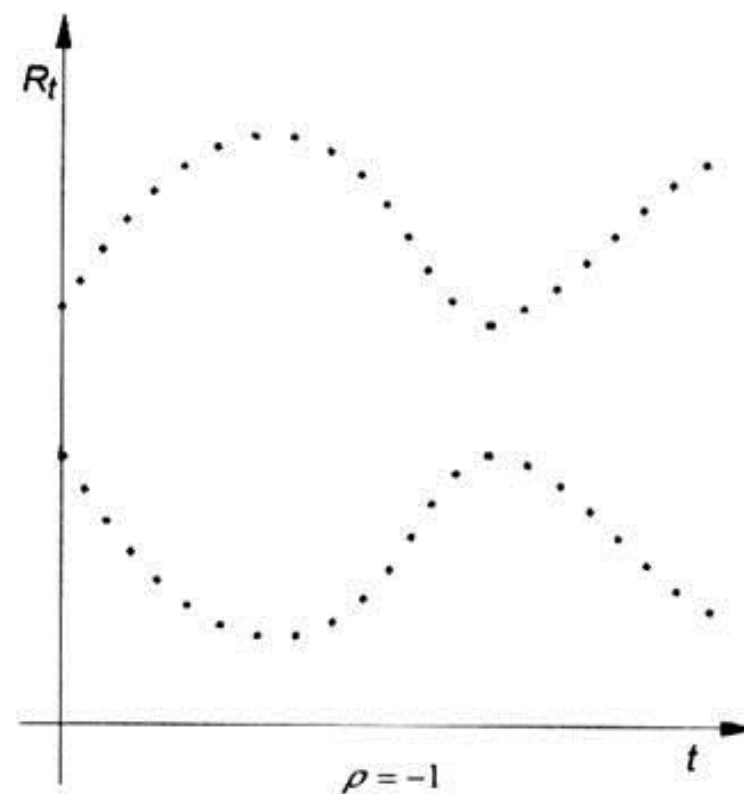
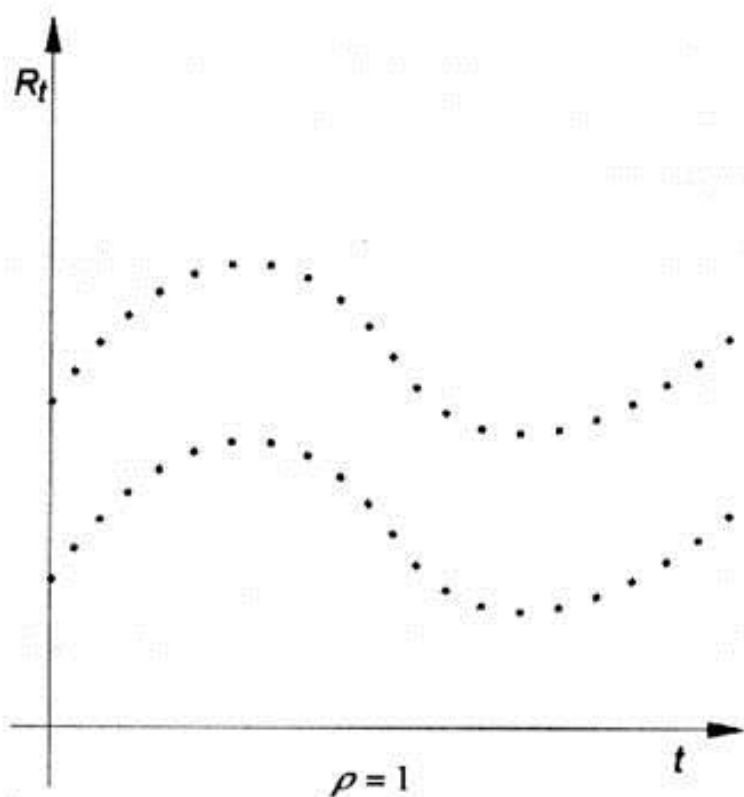
Współczynnik korelacji

ilustracja graficzna 1



Współczynnik korelacji

ilustracja graficzna 2



Współczynnik korelacji historyczny

$$r_{12} = \left[\sum_{i=1}^n (R_{1t} - R_1) \cdot (R_{2t} - R_2) \right] / (n - 1) \cdot (s_1 s_2)$$

R_{1t} – stopa zwrotu pierwszej akcji zrealizowana w n -tym okresie,

R_{2t} – stopa zwrotu drugiej akcji zrealizowana w n -tym okresie,

n – liczba okresów, z których pochodzą informacje.

Portfel dwuskładnikowy – założenia

R_1, R_2 – oczekiwane stopy zwrotu akcji,
przy czym $R_1 < R_2$,

s_1, s_2 – odchylenia standardowe stóp zwrotu akcji, przy
czym $s_1 < s_2$,

r_{12} – współczynnik korelacji stóp zwrotu akcji;

w_1, w_2 – udziały akcji w portfelu, dla których zachodzi:

$$w_1 + w_2 = 1$$

Stopa zwrotu portfela dwuskładnikowego, jej wariancja i odchylenie standardowe

$$R_p = R_1 \cdot w_1 + R_2 \cdot w_2$$

$$V_p = w_1^2 \cdot s_1^2 + w_2^2 \cdot s_2^2 + 2 \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot r_{12}$$

$$s_p = (V_p)^{0,5}$$

Przypadek 1: $r_{12} = 1$

- wariancja stóp zwrotu

$$V_p = (w_1 \cdot s_1 + w_2 \cdot s_2)^2$$

- odchylenie standardowe

$$s_p = w_1 \cdot s_1 + w_2 \cdot s_2$$

Przypadek 2 : $r_{12} = -1$

wariancja stóp zwrotu

$$V_p = (w_1 \cdot s_1 - w_2 \cdot s_2)^2$$

odchylenie standardowe

$$s_p = |w_1 \cdot s_1 - w_2 \cdot s_2|$$

gdy udziały akcji w portfelu są następujące:

$$w_1 = s_2 / (s_1 + s_2) \quad \text{oraz} \quad w_2 = s_1 / (s_1 + s_2)$$

- to $s_p = 0$

Przypadek 3: $r_{12} = 0$

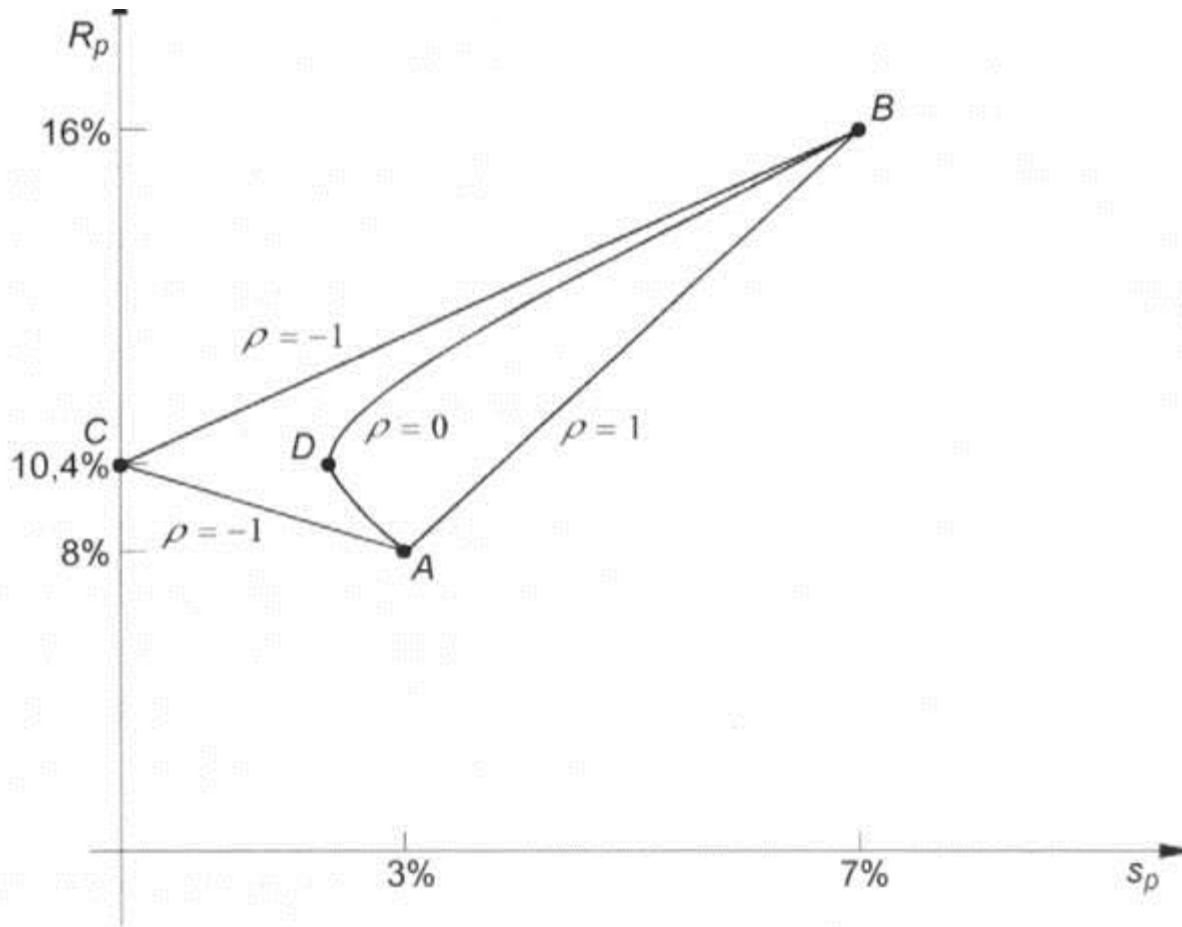
wariancja stóp zwrotu

$$V_p = w_1^2 \cdot s_1^2 + w_2^2 \cdot s_2^2$$

odchylenie standardowe

$$s_p = \left(w_1^2 \cdot s_1^2 + w_2^2 \cdot s_2^2 \right)^{0,5}$$

Trzy przypadki współczynnika r



Minimalne ryzyko

Minimalne ryzyko portfela akcji dwóch spółek osiągnane jest dla następujących udziałów akcji w portfelu:

$$w_1 = (s_2^2 - s_1 \cdot s_2 \cdot r_{12}) / (s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot r_{12})$$

$$w_2 = (s_1^2 - s_1 \cdot s_2 \cdot r_{12}) / (s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot r_{12})$$

Portfel o powyższych udziałach nazywa się **portfelem o minimalnej wariancji** (MVP, *minimum variance portfolio*).

Minimalne ryzyko (cd.)

Portfel o minimalnym ryzyku osiągnany jest dla nieujemnych udziałów w portfelu, gdy zachodzi nierówność:

$$r_{12} < s_1 / s_2$$

Portfel akcji wielu spółek - założenia

- n – liczba spółek,
- R_t – oczekiwana stopa zwrotu akcji i -tej spółki,
- s_i – ryzyko (odchylenie standardowe) akcji spółki,
- r_{ij} – współczynnik korelacji stóp zwrotu akcji i -tej oraz j -tej spółki,
- w_i – udział akcji i -tej spółki w portfelu.

Udziały są liczbami z przedziału $[0; 1]$
zakładamy, że nie występuje krótka sprzedaż i zachodzi:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Oczekiwana stopa zwrotu i ryzyko portfela wieloskładnikowego

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

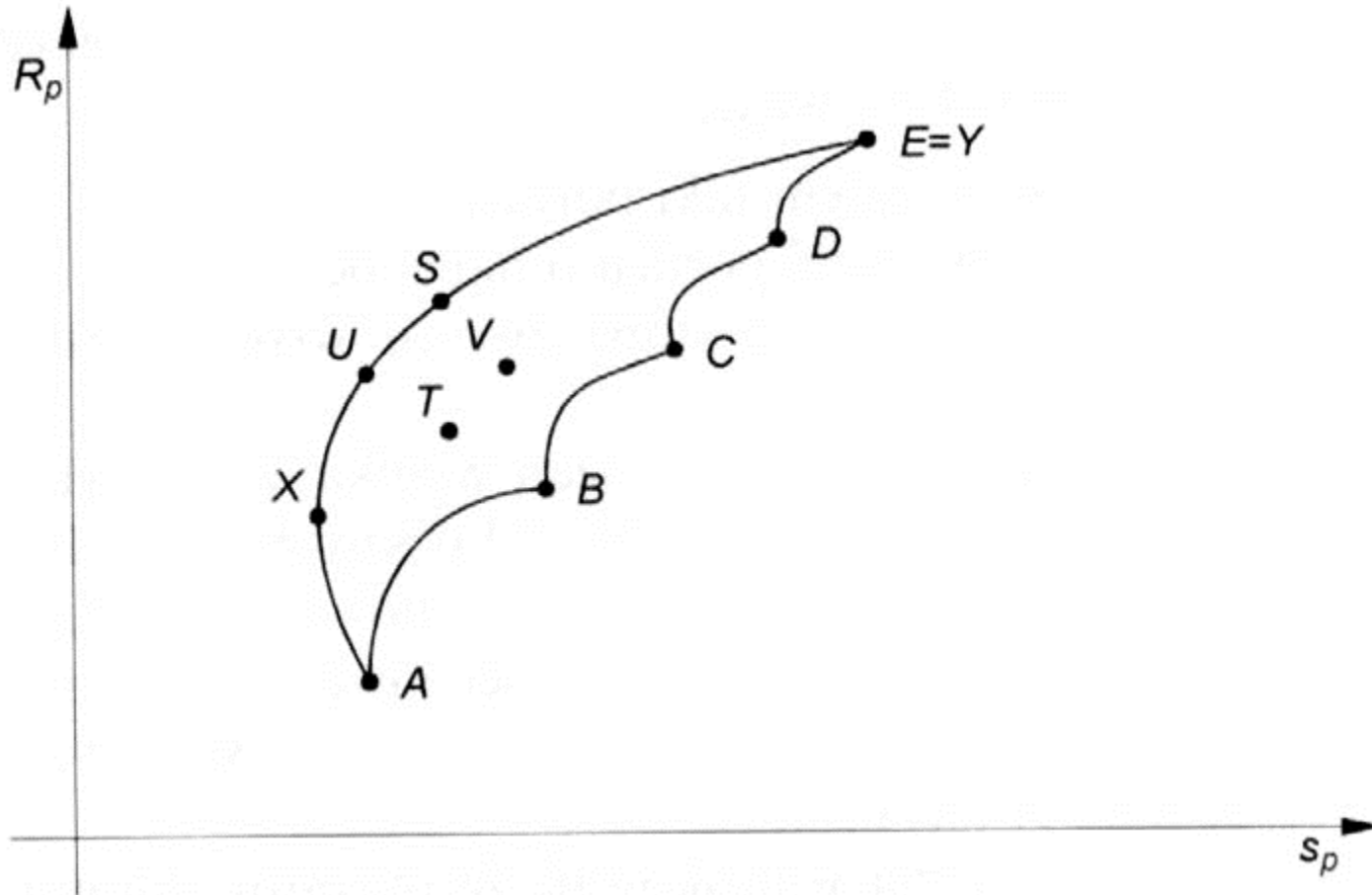
$$V_p = \sum_{i=1}^n w_i^2 s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n w_i w_j s_i s_j \rho_{ij}$$

$$s_p = (V_p)^{0,5}$$

Portfel efektywny

- Podzbiór zbioru możliwości określający te portfele, dla których nie można wskazać portfeli lepszych, nazywa się **granicą efektywną** lub **zbiorem efektywnym** (efficient set, efficient frontier). Portfele leżące na efektywnej granicy nazywają się portfelami efektywnymi.
- Portfel efektywny jest to zatem taki portfel, który:
 - ma minimalne ryzyko wśród portfeli o danej oczekiwanej stopie zwrotu,
 - ma maksymalną oczekiwaną stopę zwrotu wśród portfeli o danym poziomie ryzyka.

Portfel akcji wielu spółek



Portfel zawierający akcje i instrumenty wolne od ryzyka

Oczekiwana stopa zwrotu

$$R_p = w_f \cdot R_f + (1 - w_f) \cdot R_e \quad R_f < R_e$$

R_e – oczekiwana stopa zwrotu portfela efektywnego,

s_e – ryzyko portfela efektywnego,

R_f – stopa zwrotu instrumentu wolnego od ryzyka,
czyli tzw. stopa zwrotu wolna od ryzyka,

w_f – udział w portfelu instrumentów wolnych od ryzyka.

Ryzyko (odchylenie standardowe) portfela zawierający akcje
i instrumenty wolne od ryzyka:

$$s_p = (1 - w_f) \cdot s_e$$

Opracowano na podstawie:

Krzysztof Jajuga, Teresa Jajuga,

Inwestycje. Instrumenty finansowe. Aktywa niefinansowe.

Ryzyko finansowe. Inżynieria finansowa,

Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006,

s. 174 – 230.