Sigma²

*Trzeci Lubelski Konkurs Statystyczno-Demograficzny*
*z okazji Dnia Statystyki Polskiej*

# Analiza dynamiki zjawisk ekonomicznych

*Statystyka opisowa*

NBP
Narodowy Bank Polski

Projekt dofinansowany ze środków Narodowego Banku Polskiego

Urząd Statystyczny w Lublinie

Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji w Zamościu

Polskie Towarzystwo Statystyczne

# Indeksy statystyczne

Służą do porównania zmian wartości zmiennej w dwóch okresach czasowych: okresu badanego $(t=1)$ oraz okresu przyjętego za podstawę badań $(t=0)$ .

Do analizy tego rodzaju danych wykorzystuje się m.in. przyrosty absolutne i względne, indeksy jednopodstawowe i łańcuchowe, indeksy dla wielkości absolutnych i stosunkowych (ilorazowych).

## Proste metody badania zmian w dwóch okresach. Przyrosty absolutne

Dwie liczby można porównać ze sobą przez odejmowanie lub dzielenie. Odejmowanie dwóch liczb daje w wyniku dodatni lub ujemny **przyrost absolutny** (zwany też **bezwzględnym**).

Przyrosty absolutne mogą być obliczane w stosunku do jednego okresu (momentu) lub też okresu (momentu) stale zmieniającego się. W pierwszym przypadku mówimy o przyrostach absolutnych **o podstawie stałej** (**jedno-podstawowych**), w drugim zaś – o przyrostach absolutnych **o podstawie zmiennej** (**łańcuchowych**).

## Przyrosty absolutne o podstawie stałej (jednopodstawowych)

Jeżeli za podstawę porównań przyjmiemy $y_1$, to ciąg przyrostów absolutnych o podstawie stałej przyjmuje postać:

$$y_2 - y_1, y_3 - y_1, \ldots\ldots, y_{n-1} - y_1, y_n - y_{n-1}$$

## Przyrosty absolutne o podstawie zmiennej (łańcuchowe)

$$y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots\ldots, y_{n-1} - y_{n-2}, y_n - y_{n-1}$$

# Interpretacja przyrostów absolutnych

Przyrosty absolutne informują o tym, ile jednostek wzrósł (+) lub zmalał (–) poziom badanego zjawiska w okresie (momencie) badanym w porównaniu z okresem (momentem) przyjętym za podstawę. Przyrosty absolutne (zarówno jednopodstawowe jak i łańcuchowe) są wielkościami **mianowanymi**, wyrażonymi w tych samych jednostkach miary co badane zjawisko.

Istotnym zagadnieniem przy obliczaniu przyrostów absolutnych jednopodstawowych jest **wybór podstawy porównań**.

# Przyrosty względne

**Przyrostem względnym** nazywamy iloraz przyrostów absolutnych zjawiska do jego poziomu w okresie (momencie) przyjętym za podstawę porównań. Przyrosty względne podobnie jak absolutne mogą być **jednopodstawowe** i **łańcuchowe**.

## Jednopodstawowe przyrosty względne

Ciąg wartości przyrostów względnych o podstawie stałej $y_1$ jest następujący:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_1}, \frac{y_3 - y_1}{y_1}, \ldots\ldots, \frac{y_{n-1} - y_1}{y_1}, \frac{y_n - y_1}{y_1}$$

## Łańcuchowe przyrosty względne

$$\frac{y_2 - y_1}{y_1}, \frac{y_3 - y_2}{y_2}, \ldots\ldots, \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{y_{n-2}}, \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n-1}}$$

# Interpretacja przyrostów względnych

Przyrosty względne wyrażone są w ułamkach lub procentach. Informują one o tym, o ile wyższy lub niższy jest poziom badanego zjawiska w danym okresie w stosunku do okresu przyjętego za podstawę (indeksy względne jednopodstawowe) lub do okresu bezpośrednio poprzedzającego (indeksy względne łańcuchowe). Przyrosty łańcuchowe określane są mianem **wskaźników tempa zmian**.

# Wskaźniki (indeksy) dynamiki

**Wskaźnikiem (indeksem) dynamiki** nazywamy stosunek wielkości badanego zjawiska w danym okresie (momencie) do wielkości tego samego zjawiska w innym okresie (momencie), przyjętym za podstawę porównań:

$$i = \frac{y_1}{y_0} \quad \text{lub} \quad i = \frac{y_1}{y_0} \cdot 100\%$$

Indeks jest wielkością niemianowaną i może być wyrażony w ułamku lub w procentach.
Jeżeli przyjmuje wartość z przedziału: $0 \le i < 1$ lub $0\% \le i < 100\%$, świadczy to o spadku poziomu zjawiska w badanym okresie w stosunku do okresu podstawowego. Większa od jedynki (lub 100%) wartość indeksu informuje o wzroście poziomu zjawiska w badanym w porównaniu z okresem podstawowym. Wartość indeksu równa 1 (lub 100%) oznacza, że wielkość zjawiska w porównywanych okresach była taka sama.

# Jednopodstawowe i łańcuchowe wskaźniki (indeksy) dynamiki

Jednopodstawowe wskaźniki (indeksy) dynamiki:

$$\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \ldots\ldots, \frac{y_{n-1}}{y_1}, \frac{y_n}{y_1}$$

Łańcuchowe wskaźniki (indeksy) dynamiki:

$$\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}, \ldots\ldots, \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}}, \frac{y_n}{y_{n-1}}$$

## Zamiana indeksów jednopodstawowych na łańcuchowe

Zamiany indeksów jednopodstawowych na łańcuchowe dokonujemy przez dzielenie indeksów jednopodstawowych przez siebie zgodnie ze wzorem:

$$\frac{y_i}{y_1} : \frac{y_{i-1}}{y_1} = \frac{y_i}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y_{i-1}} = \frac{y_i}{y_{i-1}}$$

## Zamiana indeksów łańcuchowych na jednopodstawowe

Dokonujemy według następujących zasad:

1. Indeks jednopodstawowy w okresie następującym bezpośrednio po okresie przyjętym za podstawę jest taki sam jak indeks łańcuchowy
2. Indeks jednopodstawowy w okresie przyjętym za podstawę wynosi 100%
3. Dalsze indeksy jednopodstawowe po okresie przyjętym za podstawowy otrzymujemy mnożąc w sposób narastający kolejne indeksy łańcuchowe, licząc od wskaźnika łańcuchowego znajdującego się po okresie podstawowym

$$\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}, \ldots\ldots, \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}}, \frac{y_n}{y_{n-1}}$$

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2}$$

$$\frac{y_4}{y_1} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_4}{y_3}$$

4. Indeksy jednopodstawowe przed okresem podstawowym są odwrotnością kolejnych indeksów łańcuchowych, licząc od okresu przyjętego za podstawę.

# Obliczanie średniego tempa zmian zjawisk w czasie

Zarówno indeksy jednopodstawowe, jak i łańcuchowe pozwalają na ocenę zmian badanego zjawiska między wyróżnionymi okresami (momentami). Często jednak zachodzi konieczność oceny zmian danego zjawiska w całym okresie objętym obserwacją. Do tego celu służy **średnia geometryczna.**

## Średnia geometryczna

Średnia geometryczna $\left(\bar{y}_g\right)$ jest pierwiastkiem *n*-tego stopnia z iloczynu *n* zmiennych.
Z *n* wielkości absolutnych można utworzyć *n* – 1 indeksów łańcuchowych. Dysponując zatem ciągiem indeksów łańcuchowych, średnią geometryczną obliczamy następująco:

$$\bar{y}_g = \sqrt[n-1]{\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} \cdot \frac{y_n}{y_{n-1}}} = \sqrt[n-1]{\prod_{i=2}^{n} \frac{y_i}{y_{i-1}}}$$

Jeśli opieramy się na informacjach podanych w postaci wielkości absolutnych, średnią geometryczną możemy obliczyć według wzoru:

$$\bar{y}_g = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

## Średnie tempo zmian

Średnie tempo zmian w okresie, którego dotyczy szereg czasowy w wyrażeniu procentowym definiujemy jako:

Średnie tempo zmian = $\left(\bar{y}_g - 1\right) \cdot 100$

## Indeksy indywidualne i agregatowe

Wskaźniki dynamiki (indeksy) można podzielić na **indywidualne** (**proste**) i **agregatowe** (**złożone**). Indeksy indywidualne dotyczą pojedynczych zmiennych reprezentujących jednorodne, nierozkładalne zjawiska (np. sprzedaż telewizorów). Indeksy agregatowe (zespołowe) obliczane są dla niejednorodnego zbioru elementów (np. wartość produkcji określonego zakładu).

## Indeksy indywidualne

**Indeksem indywidualnym** nazywamy iloraz poziomów tego samego pojedynczego zjawiska z dwóch różnych okresów (momentów). W statystyce społeczno – ekonomicznej rozpatruje się zwykle trzy rodzaje indywidualnych wskaźników dynamiki: **indeksy cen, ilości i wartości**.

# Indywidualny indeks cen

Wyraża relację poziomu cen określonego dobra w okresie badanym i w okresie podstawowym, czyli:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}$$

gdzie:

$i_p$ – indywidualny indeks cen

$p_1$ – cena jednostki wyrobu w okresie badanym (sprawozdawczym)

$p_0$ – cena jednostki wyrobu w okresie podstawowym (bazowym)

## Indywidualny indeks ilości (masy fizycznej)

Wyraża relację ilości określonego wyrobu wytworzonego w okresie badanym i w okresie podstawowym, czyli:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

gdzie:

$i_q$ – indywidualny indeks ilości

$q_1$ – ilość wyrobu wyprodukowanego w okresie badanym (sprawozdawczym)

$q_0$ – ilość wyrobu wyprodukowanego w okresie podstawowym (bazowym)

## Indywidualny indeks wartości

Iloczyn ilości wytworzonego wyrobu w okresie badanym i ceny tego wyrobu z tego samego okresu daje wartość: $w_1 = q_1 p_1$

Indywidualny indeks wartości jest ilorazem wartości wytworzonego wyrobu w okresie badanym do wartości wytworzonego wyrobu w okresie podstawowym, czyli:

$$i_w = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_0} = \frac{w_1}{w_0}$$

gdzie:

$i_w$ – indywidualny indeks wartości

$w_1$ – wartość wyrobu wyprodukowanego w okresie badanym (sprawozdawczym)

$w_0$ – wartość wyrobu wyprodukowanego w okresie podstawowym (bazowym)

# Relacja pomiędzy indywidualnymi indeksami cen, ilości i wartości. Równość indeksowa

$$i_w = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_0} = \frac{q_1}{q_0} \cdot \frac{p_1}{p_0} = i_q \cdot i_p$$

# Indeksy agregatowe (zespołowe) dla wielkości absolutnych

Są to indeksy liczone dla całego zespołu (agregatu) jednostek.
Wyróżnia się indeks wartości, cen i ilości.
Agregatowy indeks wartości wyraża zmiany, jakie nastąpiły w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym zarówno w ilościach określonego agregatu, jak również w ich cenach.

# Agregatowy indeks wartości

Jest ilorazem sum wartości badanych wyrobów (towarów) w okresie badanym i w okresie podstawowym, czyli:

$$I_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} w_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}}$$

gdzie:

$I_w$ – agregatowy indeks wartości badanego zespołu wyrobów

$\sum_{i=1}^{n} w_{i1} = \sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i1}$ – suma wartości badanego agregatu w okresie badanym (sprawozdawczym)

$\sum_{i=1}^{n} w_{i0} = \sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}$ – suma wartości badanego agregatu w okresie podstawowym

# Agregatowe indeksy ilości i cen

W celu obliczenia siły i kierunku zmian wyłącznie ilości lub tylko cen wyrobów wchodzących w skład analizowanego agregatu, oblicza się **agregatowe indeksy ilości** (fizycznych rozmiarów, masy fizycznej) i **agregatowe indeksy cen**.

Konstrukcja agregatowych indeksów ilości i cen oparta jest na metodzie eliminacji, zwanej też standaryzacją wskaźników dynamiki. Standaryzacja polega na przyjęciu stałego poziomu jednego z dwóch czynników: cen lub ilości. Do uzyskania agregatowego indeksu ilości „unieruchamiane" są (ustalane na stałym poziomie) ceny. Do uzyskania agregatowego indeksu cen „unieruchamiane" są (ustalane na stałym poziomie) ilości. Wybór okresu standaryzacji zależy od celu badania i posiadanych informacji statystycznych.

Najczęściej wykorzystuje się dwie formuły standaryzacji: **Laspeyresa i Paaschego**.

## Standaryzacje według formuł Laspeyresa i Paaschego

Standaryzacja według Laspeyresa polega na unieruchomieniu ilości (przy obliczaniu agregatowego indeksu cen) lub cen (przy obliczaniu agregatowego indeksu ilości) na poziomie okresu podstawowego (bazowego).

Standaryzacja według Paaschego polega na unieruchomieniu ilości (przy obliczaniu agregatowego indeksu cen) lub cen (przy obliczaniu agregatowego indeksu ilości) na poziomie okresu badanego (sprawozdawczego).

# Agregatowe indeksy ilości według formuł Laspeyresa i Paaschego

Agregatowy indeks ilości Laspeyresa przyjmuje następującą postać:

$$I_q^L = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

Agregatowy indeks ilości Paaschego przyjmuje następującą postać:

$$I_q^P = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}$$

Agregatowe indeksy ilości informują o tym, o ile – przeciętnie biorąc – wzrosła lub zmalała ilość określonego zestawu wyrobów w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym (przy założeniu przyjętym w formule standaryzacji (czyli przy założeniu, że ceny pozostaną na poziomie podstawowym – indeks Laspeyresa lub badanym – indeks Paaschego).

# Agregatowe indeksy cen według formuł Laspeyresa i Paaschego

Agregatowy indeks cen Laspeyresa przyjmuje następującą postać:

$$I_p^L = \frac{\sum q_0 p_1}{\sum q_0 p_0}$$

Agregatowy indeks cen Paaschego przyjmuje następującą postać:

$$I_p^P = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$$

Agregatowe indeksy cen informują o tym, jak – przeciętnie rzecz biorąc – zmieniły się ceny ilość określonego zestawu wyrobów w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym (przy założeniu przyjętym w formule standaryzacji (czyli przy założeniu, że ilości pozostaną na poziomie podstawowym – indeks Laspeyresa lub badanym – indeks Paaschego).

# Relacja pomiędzy agregatowymi indeksami liczonymi według formuł Laspeyresa i Paaschego

Agregatowe indeksy cen i ilości obliczone według formuł Laspeyresa i Paaschego dla tego samego agregatu zwykle różnią się między sobą.

Powstaje zatem pytanie, która z formuł jest poprawniejsza?

Zaleca się aby przy pełnym dostępie do informacji – obliczać indeksy agregatowe według obydwu formuł standaryzacyjnych. Formuły te wyznaczają granice zmian w dynamice badanego agregatu.

## Agregatowe indeksy według formuły Fishera

Obliczane są w przypadku niezbyt odległych okresów porównawczych (tzn. podstawowego i badanego). Agregatowy indeks Fishera jest średnią geometryczną indeksów standaryzowanych (cen i ilości) według formuł Laspeyresa i Paaschego. Zgodnie z podaną definicją, agregatowe indeksy ilości i cen według formuły Fishera przyjmują postaci:

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P}$$

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}$$

## Związki pomiędzy agregatowymi indeksami wartości, ilości i cen. Równość indeksowa dla indeksów agregatowych (zespołowych)

$$I_w = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \cdot \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

a to oznacza:

$$I_w = I_p^L \cdot I_q^P = I_p^P \cdot I_q^L$$

i dalej

$$I_q^F \cdot I_p^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P} \cdot \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P} = \sqrt{I_p^L \cdot I_q^P \cdot I_p^P \cdot I_q^L} = \sqrt{I_w \cdot I_w} = I_w$$

i stąd równość indeksowa:

$$I_w = I_p^L \cdot I_q^P = I_p^P \cdot I_q^L = I_p^F \cdot I_q^F$$

## Wielkości stosunkowe

**Wielkości stosunkowe (ilorazowe)** są wskaźnikami natężenia wyrażającymi stosunek dwóch zjawisk logicznie powiązanych ze sobą. Przykładem mogą być takie kategorie ekonomiczne, jak:

- wydajność pracy (iloraz wielkości lub wartości produkcji i zaangażowanej pracy (czas lub liczba pracujących)
- koszt jednostkowy (iloraz kosztu całkowitego i wielkości produkcji)
- średnia płaca (iloraz funduszu płac i liczby zatrudnionych)

# Wielkości stosunkowe cząstkowe i ogólne

Każdą wielkość stosunkową można rozpatrywać jako ogólną (zespołową) i cząstkową (jednostkową). Wielkość stosunkową cząstkową zapisujemy w postaci ułamka:

$$x = \frac{a}{b}$$

stąd:

$$a = x \cdot b \qquad \text{oraz} \qquad b = \frac{a}{x} = \frac{1}{x} \cdot a$$

Wielkości stosunkowe ogólne (dotyczące całej zbiorowości) zapisujemy w postaci ułamka:

$$X = \frac{B}{B} = \frac{\sum a}{\sum b} = \frac{\sum xb}{\sum b} = \frac{\sum a}{\sum \frac{a}{x}}$$

## Indeksy wielkości stosunkowych

Oznaczając przez $X_1$ ogólną wielkość stosunkową w okresie badanym, a przez $X_0$ wielkość stosunkową w okresie podstawowym, możemy zapisać:

$$I_x = \frac{X_1}{X_0} = \frac{\sum a_1}{\sum b_1} : \frac{\sum a_0}{\sum b_0} = \frac{\sum x_1 b_1}{\sum b_1} : \frac{\sum x_0 b_0}{\sum b_0} = \frac{\sum a_1}{\sum \frac{a_1}{x_1}} : \frac{\sum a_0}{\sum \frac{a_0}{x_0}}$$

Powyższy indeks nosi nazwę **agregatowego** (zespołowego) **indeksu wszechstronnego** albo **indeksu o zmiennej strukturze**.
Jak widać indeks ten można obliczać za pomocą trzech różnych ale równoważnych sposobów.

# Czynniki wpływające na wartość indeksu wszechstronnego

Wartość indeksu wszechstronnego jest wypadkową działania dwóch czynników, a mianowicie:
- dynamiki cząstkowych wielkości stosunkowych
- zmian w strukturze czynników $a$ lub $b$ .

## Indeksy zespołowe wielkości stosunkowych o stałej strukturze – formuła Laspeyresa

Wpływ dynamiki cząstkowych wielkości stosunkowych na poziom indeksu wszechstronnego określają indeksy zespołowe wielkości stosunkowych o stałej strukturze. Przyjmując za niezmienne wskaźniki struktury czynników $a$ i $b$ z okresu podstawowego (formuła Laspeyresa) otrzymujemy wzory na indeksy o stałej strukturze:

$$I_{x/a_0} = \frac{\sum a_0}{\sum \frac{a_0}{x_1}} : \frac{\sum a_0}{\sum \frac{a_0}{x_0}}$$

oraz

$$I_{x/b_0} = \frac{\sum x_1 b_0}{\sum b_0} : \frac{\sum x_0 b_0}{\sum b_0}$$

## Indeksy zespołowe wielkości stosunkowych o stałej strukturze – formuła Paaschego

Stabilizując współczynniki struktury czynników $a$ i $b$ na poziomie okresu badanego (formuła Paaschego), otrzymujemy:

$$I_{x/a_1} = \frac{\sum a_1}{\sum \frac{a_1}{x_1}} : \frac{\sum a_1}{\sum \frac{a_1}{x_0}} \quad \text{oraz} \quad I_{x/b_1} = \frac{\sum x_1 b_1}{\sum b_1} : \frac{\sum x_0 b_1}{\sum b_1}$$

# Indeksy zespołowe wielkości stosunkowych zmian strukturalnych – formuła Laspeyresa

Wpływ zmian w strukturze $a$ i $b$ na poziom indeksu wszechstronnego określają **indeksy zespołowe wielkości stosunkowych zmian strukturalnych.** Indeks zmian strukturalnych typu Laspeyresa otrzymujemy przyjmując za stałe cząstkowe wielkości stosunkowe z okresu podstawowego.

Agregatowy indeks wpływu zmian w strukturze czynnika typu $b$ Laspeyresa ma następującą postać:

$$_{b}I_{x/x_0} = \frac{\sum x_0 b_1}{\sum b_1} : \frac{\sum x_0 b_0}{\sum b_0}$$

Agregatowy indeks wpływu zmian w strukturze czynnika typu $a$ Laspeyresa ma następującą postać:

$$_{a}I_{x/x_0} = \frac{\sum a_1}{\sum \frac{a_1}{x_0}} : \frac{\sum a_0}{\sum \frac{a_0}{x_0}}$$

# Indeksy zespołowe wielkości stosunkowych zmian strukturalnych – formuła Paaschego

Jeżeli za niezmienne przyjmiemy cząstkowe wielkości stosunkowe z okresu badanego, to otrzymamy indeks zespołowy wielkości stosunkowych wpływu zmian strukturalnych typu Paaschego.

Agregatowy indeks wpływu zmian w strukturze czynnika $b$ typu Paaschego ma następującą postać:

$$ {}_{b}I_{x/x_1} = \frac{\sum x_1 b_1}{\sum b_1} : \frac{\sum x_1 b_0}{\sum b_0} $$

Agregatowy indeks wpływu zmian w strukturze czynnika $a$ typu Paaschego ma następującą postać:

$$ {}_{a}I_{x/x_1} = \frac{\sum a_1}{\sum \frac{a_1}{x_1}} : \frac{\sum a_0}{\sum \frac{a_0}{x_1}} $$

## Równości indeksowe dla wielkości stosunkowych

Pomiędzy indeksem wszechstronnym a indeksami o stałej i zmiennej strukturze czynnika $b$ , przy zachowaniu przemienności formuł standaryzacyjnych, zachodzą następujące relacje:

$$I_x = I_{x/b_1} \cdot_b I_{x/x_0} \quad \text{oraz} \quad I_x = I_{x/b_0} \cdot_b I_{x/x_1}$$

Analogiczny związek ma miejsce między indeksem wszechstronnym a indeksem o stałej strukturze czynnika $a$ i indeksem wpływu zmian w strukturze czynnika $a$ , tzn.

$$I_x = I_{x/a_1} \cdot_a I_{x/x_0} \quad \text{oraz} \quad I_x = I_{x/a_0} \cdot_a I_{x/x_1}$$